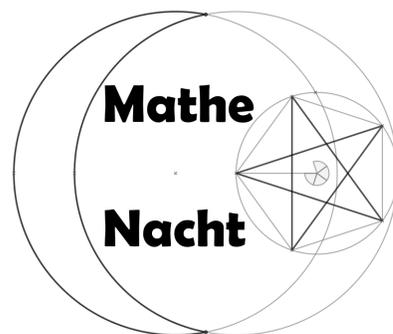
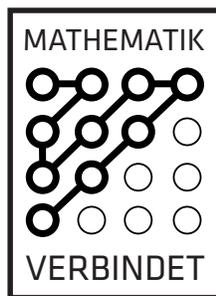


# Grundlagen



## 1. Aufgabe:

Wahr oder Falsch?

- a) Folgende Mengen sind gleich:

$$A = \{3, 7, a, 4, 18\}, \quad B = \{4, 9 + 9, 3, a, 7\}$$

- b) Für beliebige Mengen  $A$  und  $B$  gilt:  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ , aber die Umkehrung gilt nicht.  
c) Seien  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  und  $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq 5\}$ . Dann sind  $A$  und  $B$  disjunkt.  
d) Seien  $A = \{7, 8, 9\}$  und  $B = \{14, 16, 18, 20\}$  Mengen. Dann ist  $B = \{2\chi \mid \chi \in A\}$ .  
e) Die Potenzmenge der Menge  $2\mathbb{Z}$  ist unendlich.  
f) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, die durch  $f(x) = \sin(x)$  definiert ist. Dann ist  $f$  surjektiv, aber nicht injektiv.  
g) Es gilt

$$\prod_{k=3}^{10} (k-5)^2 = \left( \prod_{k=3}^5 (k-5)^2 \right) \cdot \left( \prod_{k=7}^{10} (k-5)^2 \right) = 0$$

## 2. Aufgabe:

Bestimme die Potenzmenge folgender Mengen:

$$\{1\}, \{\emptyset\}, \{\text{Berlin, Paris, Amsterdam}\}, \{1, 3, \{1, 3\}\}$$

## 3. Aufgabe:

Seien  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 13\}$  und  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$  Mengen. Bilde die Vereinigung und den Durchschnitt von  $A$  und  $B$ .

## 4. Aufgabe:

Seien  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > y, \text{ wobei } y \text{ die Anzahl der Primzahlen bis } 20 \text{ ist}\}$ ,  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -y, \text{ wobei } y \text{ eine gerade Primzahl ist}\}$ ,  
 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist größer als die größte negative ungerade Zahl und kleiner als } 8\}$   
Bilde:  $A \cup B, A \cap C, (A \cup B) \cup C$  und  $(A \cup B) \cap C$ .

**5. Aufgabe :**

Sei  $A := \mathbb{R}^2$ . Zeige, dass folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf  $A$  ist:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Bestimme außerdem die Äquivalenzklasse von  $(2, 2)$  und interpretiere diese geometrisch!

**6. Aufgabe :**

Gib eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

**7. Aufgabe :**

Gib eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

**8. Aufgabe :**

Beweise mit vollständiger Induktion!

a)  $n^3 - 6n^2 + 14n$  ist durch 3 teilbar für alle  $n \geq 0$ .

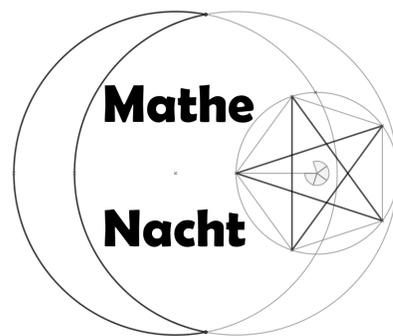
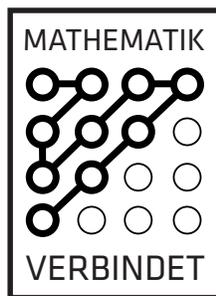
b)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$  für alle  $n \geq 1$ .

c)  $2^n > n^2$  für alle  $n \geq 5$

**9. Aufgabe :**

Zeige, dass die Mengen  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$  gleichmächtig sind.

# Gruppen, Ringe, und Körper



## 1. Aufgabe:

Sei  $G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  und

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad a * b := (a - 3)(b - 3) + 3$$

eine Verknüpfung auf  $G$ .

- Zeige, dass  $(G, *)$  eine abelsche Gruppe ist.
- Sei  $(G_2, *_2) := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  eine zweite Gruppe. Begründe, warum  $f : G \rightarrow G_2$  definiert durch  $f(x) = (x - 3)^2$  ein Gruppenhomomorphismus von  $G$  nach  $G_2$  ist.

## 2. Aufgabe:

Sei  $(G, *)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $e$ . Zeige, dass

$$U = \{u \in G \mid u = u^{-1}\}$$

eine Untergruppe von  $(G, *)$  ist.

## 3. Aufgabe:

Welche Mengen sind Ringe, welche Körper? Welche Ringe sind kommutativ? Welche haben ein Einselement?

- $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot)$      $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$      $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- Die Menge aller geraden Zahlen  $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k\}$
- Die Menge aller ungeraden Zahlen  $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k + 1\}$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$      $(\mathbb{C}, +, \cdot)$     Der Vektorraum  $\mathbb{R}^2$
- $\{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  mit der normalen Addition und Multiplikation in  $\mathbb{R}$ .

## 4. Aufgabe:

Gegeben sei die Menge

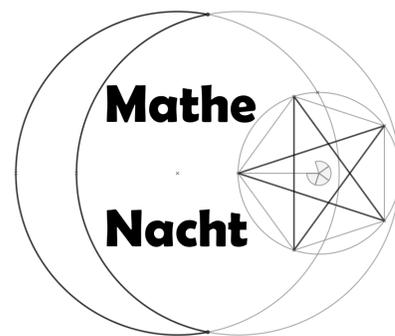
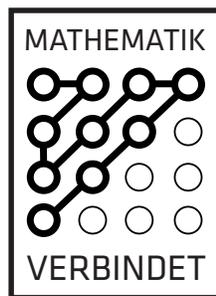
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

- Zeige, dass  $M$  mit Matrix-Addition und der Matrix-Multiplikation ein Ring ist!
- Entscheide, ob  $M$  nullteilerfrei ist, kommutativ ist oder ein Einselement hat. Begründe oder widerlege!
- Es gelten nun zusätzlich die folgenden Bedingungen:

$$b = 0, \quad a \cdot d \neq 0$$

Wird  $M$  mit diesen zusätzlichen Bedingungen ein Körper?

# Vektorräume I - Untervektorräume



## 1. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume, und welche nicht? Findet gegebenenfalls geeignete Verknüpfungen und Körper! (Bei bekannten Vektorräumen ist keine Begründung nötig)

- a)  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$
- b)  $(V, +, \cdot)$ , wobei  $V := \{(1, x, y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- c)  $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$
- d)  $(V, +, \cdot)$ , wobei  $V := \{(0, x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

## 2. Aufgabe:

Zeige: Seien  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien  $U, W \subseteq V$ . Wenn  $U \subseteq W$  ist, dann gilt  $\langle U \cap W \rangle = \langle U \rangle \cap \langle W \rangle$ . Gilt die Aussage auch, wenn  $U \not\subseteq W$  ist?

## 3. Aufgabe:

Betrachte den Vektorraum  $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit geeigneten Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Zeige, dass die Menge aller  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ein Untervektorraum von  $V$  ist. (Tipp: Mach dir zuerst klar, was  $+$  und  $\cdot$  tun.)

## 4. Aufgabe:

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Welche der Mengen  $U$  sind ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $V$  und welche nicht? Begründe!

- a)  $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- b)  $V = \mathbb{C}, U = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists \beta \in \mathbb{C} : \alpha = 2\beta\}$
- c)  $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x, 2x)^T \mid x \in \mathbb{R}\}$
- d)  $V = \mathbb{R}^2, U = \{(a, 2a + 1)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$

### **5. Aufgabe :**

Welche Aussage ist richtig?

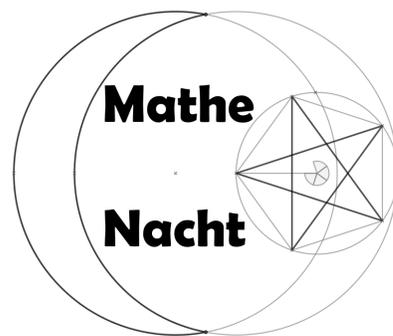
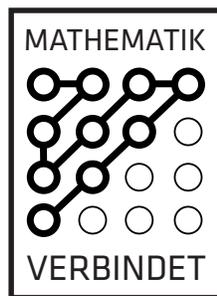
- Das Erzeugnis einer linear unabhängigen Menge ist immer linear unabhängig.
- Seien  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ ,  $U \leq V$  und  $u \in U$ . Dann ist  $\langle U + \{u\} \rangle = \langle U \rangle \cup \langle \{u\} \rangle = \langle U \rangle$ .
- Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist immer wieder ein Untervektorraum.
- Jeder Vektorraum ist ein Untervektorraum von sich selbst.
- Es existiert ein Vektorraum, der keine Untervektorräume besitzt.

### **6. Aufgabe :**

Es wird Zeit ein bisschen zu suchen! Findet ...

- a) ... einen Vektorraum, der gleichzeitig ein Körper ist.
- b) ... einen Vektorraum, dessen Elemente keine Zeilen- oder Spaltenvektoren sind.
- c) ... einen Vektorraum, dessen einziger Untervektorraum er selbst ist.
- d) ... einen Vektorraum, dessen Elemente Mengen sind.

# Vektorräume II - Basis und Dimension



## 1. Aufgabe:

Prüfe auf lineare Abhängigkeit!

a) Seien  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Prüfe die Vektoren  $v, w, u$  auf lineare Abhängigkeit!

b) Seien  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}^2, U = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ . Prüfe die Menge  $U$  auf lineare Abhängigkeit!

c) Seien  $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^2, U = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ . Prüfe die Menge  $U$  auf lineare Abhängigkeit!

d) Seien  $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^3, U = \{(x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\}, v = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3i \\ 0 \end{pmatrix}$ . Prüfe, ob der Vektor  $v$  linear Abhängig ist von der Menge  $U$ !

## 2. Aufgabe:

Bestimme für die folgenden Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$  ein Erzeugendensystem!

a)  $U_1 = \{(2a, a - b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

b)  $U_2 = \{(x, y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 2y\}$

## 3. Aufgabe:

Begründe, dass die Menge

$$B = \{(1, 2, 0)^T, (3, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (2, 4, 5)^T\}$$

keine Basis für  $\mathbb{R}^3$  bildet und finde eine Teilmenge von  $B$ , die eine Basis bildet.

## 4. Aufgabe:

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und sei  $B := \{(1, 2, a)^T, (a, 2a, 9)^T\} \subset \mathbb{R}^3$ .

a) Bestimme alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die die Vektoren  $(1, 2, a)^T, (a, 2a, 9)^T$  linear abhängig sind.

b) Wähle  $a$  so, dass  $(1, 2, a)^T, (a, 2a, 9)^T$  linear unabhängig sind und ergänze  $B$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

### 5. Aufgabe:

Wir betrachten den Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(a, 0, a)^T \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

a) Sei nun zusätzlich

$$U_2 = \{(a, b, c)^T \mid a - b - c = 0\}$$

als weiterer Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Zeige, dass  $U_1 \subseteq U_2$  ist und finde einen von  $U_1$  verschiedenen Untervektorraum  $U_3$  von  $\mathbb{R}^3$  so, dass  $U_2 \cap U_3 = U_1$  ist.

b) Gib jeweils eine Basis und die Dimension von  $U_1, U_2$  und  $U_3$  an.

c) Bestimme die Dimension von  $U_2 + U_3$ .

### 6. Aufgabe:

Wir betrachten den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{3 \times 2}$ .

a) Gib ein Beispiel für eine linear unabhängige Teilmenge von  $V$  mit drei Elementen an.

b) Welche Dimension hat der Untervektorraum  $U_1 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$ ?

c) Finde einen Untervektorraum  $U_2$  von  $V$  so, dass  $U_1 \oplus U_2 = V$  ist! ( $\oplus$  bezeichnet hierbei die direkte Summe)

### 7. Aufgabe:

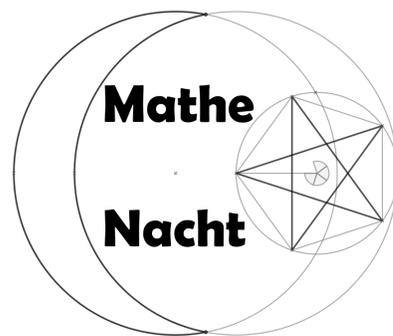
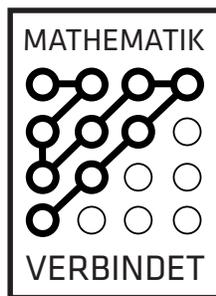
Seien  $V = \mathbb{R}^3$  und  $U = \langle (1, 2, 0)^T, (0, 0, 3)^T \rangle$ . Schreibe ein Element von  $V/U$  hin und bestimme  $\dim(V/U)$ !

### 8. Aufgabe:

Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe die wahren Aussagen und korrigiere die falschen!

- Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.
- Jeder Vektorraum ist endlich erzeugt.
- Ein Vektorraum hat nur genau eine Basis. Die Mächtigkeit dieser Basis gibt die Dimension des Vektorraumes an.
- Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ , seien  $U_1, U_2$  Untervektorräume von  $V$  mit der Eigenschaft  $\dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$  und seien  $B_1, B_2$  Basen von  $U_1, U_2$ . Dann ist  $B_1 \cup B_2$  schon eine Basis von  $V$ .

# Lineare Abbildungen



## 1. Aufgabe:

Überprüfe, welche der folgenden Abbildungen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $\mathbb{R}$ -linear sind und bestimme für die linearen Funktionen das Bild und den Kern der Abbildung.

- $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1 - 3x_3, 1 + 2x_2)^T$
- $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1^2 - 3x_3, 2x_2)^T$
- $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (0, 0)^T$

## 2. Aufgabe:

Gegeben sei die folgende Abbildung  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3 - 2x_4)^T.$$

- Beweise, dass  $f$   $\mathbb{R}$ -linear ist.
- Bestimme das Bild von  $v = (-5, 2, 0, -1)^T$  unter  $f$  und zeichne das Bild von  $\langle v \rangle$  unter  $f$  in ein Koordinatensystem.
- Gegeben Sei die geordnete Basis  $B_V := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$  des  $\mathbb{R}^4$  und die geordnete Basis  $B_W := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  des  $\mathbb{R}^2$ . Gib eine Darstellungsmatrix  $A$  von  $f$  bzgl. der Basen  $B_V$  und  $B_W$  an.
- Bestimme  $\dim(\text{im} f)$  und entscheide, ob  $f$  injektiv oder surjektiv ist.

## 3. Aufgabe:

Gegeben sei die Matrix  $A$  durch

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Funktionsgleichung der zu  $A$  gehörenden  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , für die für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  gilt  $f_A(x) = A \cdot x$ . Gib anschließend eine Basis für den Kern von  $f_A$  an und berechne die Dimension des Bildes von  $f_A$ .

#### **4. Aufgabe:**

Sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$   $K$ -Vektorräume.

Welche der Aussagen sind richtig? Begründe deine Entscheidung.

- Sei  $f : V \rightarrow V$  eine  $K$ -lineare Abbildung, dann gilt  $\text{im} f \cap \ker f = \{0\}$ .
- Sei  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Homomorphismus, dann gilt  $\dim(\ker(f)) \leq 3$ .
- Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Monomorphismus, dann ist  $f$  auch ein Isomorphismus.
- $\mathbb{R}^4$  ist isomorph zu  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Epimorphismus, dann ist  $V \cong \text{im} f$ .
- Sei  $U$  ein  $K$ -Untervektorraum von  $V$  und  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so ist auch  $f(U)$  ein  $K$ -Untervektorraum von  $W$ .

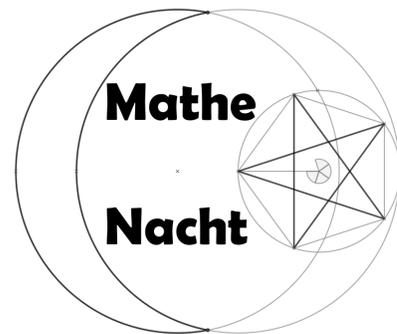
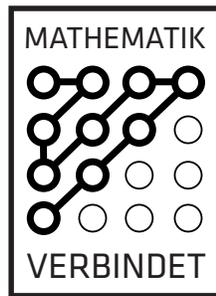
#### **5. Aufgabe:**

Sei  $F : \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $F(g) := g(x_0)$  für ein festes  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Überprüfe, ob  $F$  ein Homomorphismus ist. Für welche  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist  $F$  surjektiv?

#### **6. Aufgabe:**

Sei  $V := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$  und  $W := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2\}$ . Sind  $V$  und  $W$  isomorph? Wenn ja, gib einen Isomorphismus zwischen  $V$  und  $W$  an.

# Matrizen und Lineare Gleichungssysteme



## 1. Aufgabe:

Berechne:

$$\left( 2 \cdot \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \right)^T * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1}$$

## 2. Aufgabe:

Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme  $A \cdot x = b$  und  $B \cdot x = c$  mit folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen:

$$(A | b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 & b_1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & b_2 \\ 2 & 0 & a & 2 & b_3 \end{array} \right), \quad (B | c) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & c_2 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Bestimme für  $a = 3$  den Rang der Koeffizientenmatrix  $A$ . Was weiß man nun über die Lösungsmenge?
- Bestimme für  $a = 4$  den Rang der Koeffizientenmatrix  $A$ . Was weiß man nun über die Lösungsmenge?
- Bestimme für  $a = 4$  und  $(b_1, b_2, b_3)^T = (2, 1, 3)^T$  den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?
- Bestimme den Rang der Koeffizientenmatrix  $B$ . Wie muss  $c_2$  gewählt werden, damit das LGS  $B \cdot x = c$  genau eine/keine Lösung hat?

## 3. Aufgabe:

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren!

a)

$$2a - 3b - 2c + 4d = 7$$

$$a + b + c + d = 7$$

$$a + 2b + 3c - d = 6$$

$$3a - b + c + 2d = 10$$

b)

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$

$$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

#### 4. Aufgabe:

Gegeben sei die lineare Funktion  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $g \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ x - 2y + 4z \\ 3x - 4y + 7z \end{pmatrix}$ . Bestimme die Urbildmenge  $g^{-1}(\{(0, -6, -6)^T\})$  unter Verwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens!

#### 5. Aufgabe:

Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Die Lösungsmenge eines **homogenen** LGS ist ein Untervektorraum. Welche Dimension hat dieser in diesem Fall?

b) Zeige, dass der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Lösung des folgenden inhomogenen LGS ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) Bestimme nun, ohne zu rechnen, die Lösungsmenge des LGS aus b).