Grundlagen

1. Aufgabe :

Wahr oder Falsch?

a) Folgende Mengen sind gleich:

$$A = \{3, 7, a, 4, 18\}, \quad B = \{4, 9 + 9, 3, a, 7\}$$

b) Für beliebige Mengen A und B gilt: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, aber die Umkehrung gilt nicht.

c) Seien $A = \{1, 3, 5, 7\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq 5\}$. Dann sind A und B disjunkt.

d) Seien $A = \{7, 8, 9\}$ und $B = \{14, 16, 18, 20\}$ Mengen. Dann ist $B = \{2\chi \mid \chi \in A\}$.

e) Die Potenzmenge der Menge $2\mathbb{Z}$ ist unendlich.

f) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die durch $f(x) = \sin(x)$ definiert ist. Dann ist f surjektiv , aber nicht injektiv.

g) Es gilt

$$\prod_{k=3}^{10} (k-5)^2 = \left(\prod_{k=3}^{5} (k-5)^2\right) \cdot \left(\prod_{k=7}^{10} (k-5)^2\right) = 0$$

2. Aufgabe :

Bestimme die Potenzmenge folgender Mengen:

$$\{1\}, \{\emptyset\}, \{\text{Berlin, Paris, Amsterdam}\}, \{1, 3, \{1, 3\}\}$$

3. Aufgabe :

Seien $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 13\}$ und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$ Mengen. Bilde die Vereinigung und den Durchschnitt von A und B.

4. Aufgabe :

Seien $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > y, \text{wobei y die Anzahl der Primzahlen bis 20 ist}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -y, \text{wobei y eine gerade Primzahl ist}\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ x ist größer als die größte negative ungerade Zahl und kleiner als 8}\}$
Bilde: $A \cup B, A \cap C, (A \cup B) \cup C$ und $(A \cup B) \cap C$.

5. Aufgabe:

Sei $A := \mathbb{R}^2$. Zeige, dass folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf A ist:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Bestimme außerdem die Äquivalenzklasse von $(2, 2)$ und interpretiere diese geometrisch!

6. Aufgabe:

Gib eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

7. Aufgabe:

Gib eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

8. Aufgabe:

Beweise mit vollständiger Induktion!

a) $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \geq 0$.

b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$ für alle $n \geq 1$.

c) $2^n > n^2$ für alle $n \geq 5$

9. Aufgabe:

Zeige, dass die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Gruppen, Ringe, und Körper

1. Aufgabe:

Sei $G = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ und

$$*: G \times G \to G, \qquad a * b := (a-3)(b-3)+3$$

eine Verknüpfung auf G.

a) Zeige, dass $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Sei $(G_2, *_2) := (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ eine zweite Gruppe. Begründe, warum $f : G \to G_2$ definiert durch $f(x) = (x-3)^2$ ein Gruppenhomomorphismus von G nach G_2 ist.

2. Aufgabe:

Sei $(G, *)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Zeige, dass

$$U = \{u \in G \mid u = u^{-1}\}$$

eine Untergruppe von $(G, *)$ ist.

3. Aufgabe:

Welche Mengen sind Ringe, welche Körper? Welche Ringe sind kommutativ? Welche haben ein Einselement?

☐ $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

☐ Die Menge aller geraden Zahlen $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k\}$

☐ Die Menge aller ungeraden Zahlen $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k + 1\}$

☐ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ☐ Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$

☐ $\{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der normalen Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Menge

$$M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Zeige, dass M mit Matrix-Addition und der Matrix-Multiplikation ein Ring ist!

b) Entscheide, ob M nullteilerfrei ist, kommutativ ist oder ein Einselement hat. Begründe oder widerlege!

c) Es gelten nun zusätzlich die folgenden Bedingungen:

$$b = 0, \quad a \cdot d \neq 0$$

Wird M mit diesen zusätzlichen Bedingungen ein Körper?

Vektorräume I - Unterverktorräume

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume, und welche nicht? Findet gegebenenfalls geeignete Verknüpfungen und Körper! (Bei bekannten Vektorräumen ist keine Begründung nötig)

a) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

b) $(V, +, \cdot)$, wobei $V := \{(1, x, y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

c) $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$

d) $(V, +, \cdot)$, wobei $V := \{(0, x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

2. Aufgabe:

Zeige: Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$. Wenn $U \subseteq W$ ist, dann gilt $\langle U \cap W \rangle = \langle U \rangle \cap \langle W \rangle$. Gilt die Aussage auch, wenn $U \nsubseteq W$ ist?

3. Aufgabe:

Betrachte den Vektorraum $V := Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit geeigneten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ein Untervektorraum von V ist. (Tipp: Mach dir zuerst klar, was $+$ und $\cdot$ tun.)

4. Aufgabe:

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der Mengen U sind ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V und welche nicht? Begründe!

a) $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $V = \mathbb{C}, U = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists \beta \in \mathbb{C} : \alpha = 2\beta\}$

c) $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x, 2x)^T \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(a, 2a + 1)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$

5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig?

- ☐ Das Erzeugnis einer linear unabhängigen Menge ist immer linear unabhängig.
- ☐ Seien V ein Vektorraum über dem Körper K, $U \leq V$ und $u \in U$. Dann ist $\langle U + \{u\} \rangle = \langle U \rangle \cup \langle \{u\} \rangle = \langle U \rangle$.
- ☐ Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist immer wieder ein Untervektorraum.
- ☐ Jeder Vektorraum ist ein Untervektorraum von sich selbst.
- ☐ Es existiert ein Vektorraum, der keine Untervektorräume besitzt.

6. Aufgabe:

Es wird Zeit ein bisschen zu suchen! Findet ...

a) ... einen Vektorraum, der gleichzeitig ein Körper ist.

b) ... einen Vektorraum, dessen Elemente keine Zeilen- oder Spaltenvektoren sind.

c) ... einen Vektorraum, dessen einziger Untervektorraum er selbst ist.

d) ... einen Vektorraum, dessen Elemente Mengen sind.

Vektorräume II - Basis und Dimension

1. Aufgabe:

Prüfe auf lineare Abhängigkeit!

a) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Prüfe die Vektoren v, w, u auf lineare Abhängigkeit!

b) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}^2, U = \{\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix}\}$. Prüfe die Menge U auf lineare Abhängigkeit!

c) Seien $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^2, U = \{\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix}\}$. Prüfe die Menge U auf lineare Abhängigkeit!

d) Seien $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^3, U = \{(x, y, 0)^T \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}, v = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3i \\ 0 \end{pmatrix}$. Prüfe, ob der Vektor v linear Abhängig ist von der Menge U!

2. Aufgabe:

Bestimme für die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ ein Erzeugendensystem!

a) $U_1 = \{(2a, a - b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

b) $U_2 = \{(x, y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 2y\}$

3. Aufgabe:

Begründe, dass die Menge

$$B = \{(1, 2, 0)^T, (3, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (2, 4, 5)^T\}$$

keine Basis für $\mathbb{R}^3$ bildet und finde eine Teilmenge von B, die eine Basis bildet.

4. Aufgabe:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $B := \{(1, 2, a)^T, (a, 2a, 9)^T\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $(1, 2, a)^T, (a, 2a, 9)^T$ linear abhängig sind.

b) Wähle a so, dass $(1, 2, a)^T, (a, 2a, 9)^T$ linear unabhängig sind und ergänze B zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe:

Wir betrachten den Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(a, 0, a)^T \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

a) Sei nun zusätzlich

$$U_2 = \{(a, b, c)^T \mid a - b - c = 0\}$$

als weiterer Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeige, dass $U_1 \subseteq U_2$ ist und finde einen von U_1 verschiedenen Untervektorraum U_3 von $\mathbb{R}^3$ so, dass $U_2 \cap U_3 = U_1$ ist.

b) Gib jeweils eine Basis und die Dimension von U_1, U_2 und U_3 an.

c) Bestimme die Dimension von $U_2 + U_3$.

6. Aufgabe:

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$.

a) Gib ein Beispiel für eine linear unabhängige Teilenge von V mit drei Elementen an.

b) Welche Dimension hat der Untervektorraum $U_1 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid a_{ij} = 0 \; für \; i > j\}$?

c) Finde einen Untervektorraum U_2 von V so, dass $U_1 \oplus U_2 = V$ ist! ($\oplus$ bezeichnet hierbei die direkte Summe)

7. Aufgabe:

Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \langle (1, 2, 0)^T, (0, 0, 3)^T \rangle$. Schreibe ein Element von V/U hin und bestimme $\dim(V/U)$!

8. Aufgabe:

Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe die wahren Aussagen und korrigiere die falschen!

- ☐ Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.
- ☐ Jeder Vektorraum ist endlich erzeugt.
- ☐ Ein Vektorraum hat nur genau eine Basis. Die Mächtigkeit dieser Basis gibt die Dimension des Vektorraumes an.
- ☐ Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, seien U_1, U_2 Untervektorräume von V mit der Eigenschaft $\dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ und seien B_1, B_2 Basen von U_1, U_2. Dann ist $B_1 \cup B_2$ schon eine Basis von V.

Lineare Abbildungen

1. Aufgabe:

Überprüfe, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear sind und bestimme für die linearen Funktionen das Bild und den Kern der Abbildung.

a) $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1 - 3x_3, 1 + 2x_2)^T$

b) $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1^2 - 3x_3, 2x_2)^T$

c) $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (0, 0)^T$

2. Aufgabe:

Gegeben sei die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left((x_1, x_2, x_3, x_4)^T\right) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3 - 2x_4)^T.$$

a) Beweise, dass f $\mathbb{R}$-linear ist.

b) Bestimme das Bild von $v = (-5, 2, 0, -1)^T$ unter f und zeichne das Bild von $\langle v \rangle$ unter f in ein Koordinatensystem.

c) Gegeben Sei die geordnete Basis $B_V := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^4$ und die geordnete Basis $B_W := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$. Gib eine Darstellungsmatrix A von f bzgl. der Basen B_V und B_W an.

d) Bestimme $\dim(\mathrm{im} f)$ und entscheide, ob f injektiv oder surjektiv ist.

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Matrix A durch

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Funktionsgleichung der zu A gehörenden $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $f_A(x) = A \cdot x$. Gib anschließend eine Basis für den Kern von f_A an und berechne die Dimension des Bildes von f_A.

4. Aufgabe:

Sei K ein Körper und U, V, W K-Vektorräume.
Welche der Aussagen sind richtig? Begründe deine Entscheidung.

- ☐ Sei $f : V \to V$ eine $K-$lineare Abbildung, dann gilt $\mathrm{im} f \cap \ker f = \{0\}$.

- ☐ Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ ein Homomorphismus, dann gilt $\dim(\ker(f)) \leq 3$.

- ☐ Sei $f : V \to V$ ein Monomorphismus, dann ist f auch ein Isomorphismus.

- ☐ $\mathbb{R}^4$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

- ☐ Sei $f : V \to W$ ein Epimorphismus, dann ist $V \cong \mathrm{im} f$.

- ☐ Sei U ein $K-$Untervektorraum von V und $f : V \to W$ eine $K-$lineare Abbildung, so ist auch $f(U)$ ein $K-$Untervektorraum von W.

5. Aufgabe:

Sei $F : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert als $F(g) := g(x_0)$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$. Überprüfe, ob F ein Homomorphismus ist. Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist F surjektiv?

6. Aufgabe:

Sei $V := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ und $W := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2\}$. Sind V und W isomorph? Wenn ja, gib einen Isomorphismus zwischen V und W an.

Matrizen und Lineare Gleichungssysteme

1. Aufgabe:
Berechne:

$$\left(2\cdot\left(\left(\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&1\\0&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\-4&-2&-2\\0&-3&3\end{pmatrix}\right)\right)^T*\begin{pmatrix}0&2&4\\-2&4&8\\-2&4&10\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}$$

2. Aufgabe:

Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme $A\cdot x=b$ und $B\cdot x=c$ mit folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen:

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&4&2&b_1\\1&3&5&4&b_2\\2&0&a&2&b_3\end{array}\right),\quad (B\mid c)=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\2&4&c_2\\3&0&0\end{array}\right)$$

a) Bestimme für $a=3$ den Rang der Koeffizientenmatrix A. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?

b) Bestimme für $a=4$ den Rang der Koeffizientenmatrix A. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?

c) Bestimme für $a=4$ und $(b_1,b_2,b_3)^T=(2,1,3)^T$ den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?

d) Bestimme den Rang der Koeffizientenmatrx B. Wie muss c_2 gewählt werden, damit das LGS $B\cdot x=c$ genau eine/keine Lösung hat?

3. Aufgabe:

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren!

a)

$$\begin{aligned}2a-3b-2c+4d&=7\\a+b+c+d&=7\\a+2b+3c-d&=6\\3a-b+c+2d&=10\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3x_1+3x_2+x_3+4x_4&=0\\6x_1+6x_2+2x_3+8x_4&=2\\x_1+x_2+x_3-x_4&=3\end{aligned}$$

4. Aufgabe:

Gegeben sei die lineare Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ x - 2y + 4z \\ 3x - 4y + 7z \end{pmatrix}$. Bestimme die Urbildmenge $g^{-1}\left(\{(0, -6, -6)^T\}\right)$ unter Verwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens!

5. Aufgabe:

Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Die Lösungsmenge eines **homogenen** LGS ist ein Untervektorraum. Welche Dimension hat dieser in diesem Fall?

b) Zeige, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des folgenden inhomogenen LGS ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) Bestimme nun, ohne zu rechnen, die Lösungsmenge des LGS aus b).